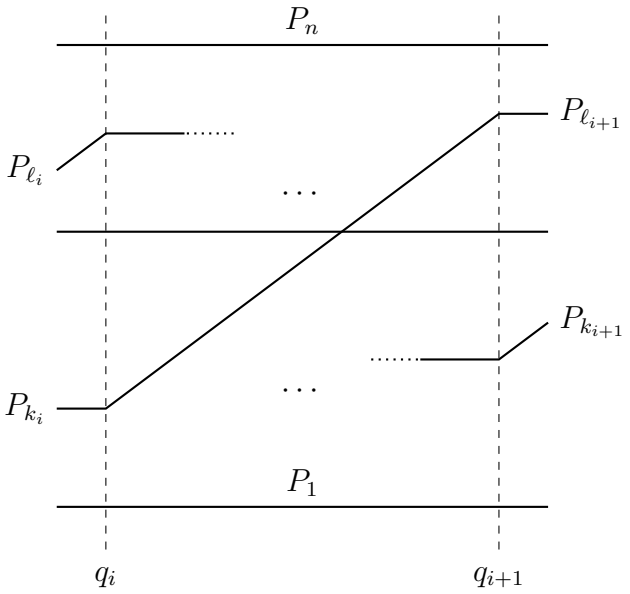
Cours 5: Construction de points

1. **Stratégie générale.**

Soit $\mathbf{P} := (P_1, \ldots, P_n)\colon [q_0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ un n-système rigide de maille $c \geq \log(2)$. On cherche à construire un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{L_u} - \mathbf{P}$ soit borné. Pou simplifier, on va supposer que $\mathbf{P}$ admet une suite infinie de points d'échange $(q_i)_{i\geq 0}$. Cela revient à demander que P_{n-1} n'est pas borné.

On commence par quelques rappels. D'abord, le graphe conjoint au voisinage d'un intervalle $[q_i, q_{i+1}]$ entre deux points déchange consécutifs est illustré sur la figure 1 ci-dessous.



Pour chaque $i \geq 0$, on pose $\mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{P}(q_i)$. On note k_i l'indice k pour lequel P_k est de pente 1 à droite de q_i. Si $i \geq 1$, on note ℓ_i l'indice ℓ pour lequel P_ℓ est de pente 1 à gauche de q_i. On pose $\ell_0 = n$. Ces points et ces nombres satisfont les propriétés d'un canevas de maille c, à savoir que, pour tout $i \geq 0$, on a

(C1) $\mathbf{a}^{(i)} = (a_1^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)})$ avec $0 < a_1^{(i)} < \cdots < a_n^{(i)}$ multiples de c,
(C2) $1 \leq k_0 \leq \ell_0 = n$ et $1 \leq k_i < \ell_i \leq n$ si $i \geq 1$,
(C3) $\ell_{i+1} \geq k_i$, $a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} \geq a_{\ell_{i+1}}^{(i)} + c$ et

$$(a_1^{(i+1)}, \ldots, \widehat{a_{\ell_{i+1}}^{(i+1)}}, \ldots, a_n^{(i+1)}) = (a_1^{(i)}, \ldots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \ldots, a_n^{(i)}).$$

À partir de ces données, on retrouve la suite des points d'échange de $\mathbf{P}$ puis la fonction $\mathbf{P}$ elle-même grâce aux formules

$$q_i = a_1^{(i)} + \cdots + a_n^{(i)} \qquad (i \geq 0),$$

$$\mathbf{P}(q) = \Phi_n\big(a_1^{(i)}, \ldots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \ldots, a_n^{(i)}, a_{k_i}^{(i)} + q - q_i\big) \qquad (i \geq 0,\ q_i \leq q < q_{i+1}).$$

La stratégie générale pour construire un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathbf{L_u} - \mathbf{P}$ soit borné procède en deux étapes.

1° On construit une suite de bases de $\mathbb{Z}^n$

$$\underline{\mathbf{x}}^{(i)} = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)}) \quad (i \geq 0)$$

qui satisfont les conditions suivantes pour tout $i \geq 0$:

(1) $(\mathbf{x}_1^{(i+1)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{\ell_{i+1}}^{(i+1)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i+1)}) = (\mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)})$,

(2) $\mathbf{x}_{\ell_{i+1}}^{(i+1)} \in \mathbf{x}_{k_i}^{(i)} + \langle \mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_{\ell_{i+1}}^{(i)} \rangle_{\mathbb{Z}}$,

(3) $a_j^{(i)} \leq \log \|\mathbf{x}_j^{(i)}\| \leq a_j^{(i)} + \log(2) \quad (1 \leq j \leq n)$,

(4) $\|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{x}_m^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\| \geq \dfrac{\theta}{2} \|\mathbf{x}_1^{(i)}\| \cdots \widehat{\|\mathbf{x}_m^{(i)}\|} \cdots \|\mathbf{x}_n^{(i)}\|$ pour $m = k_i$ et $m = \ell_i$,

où θ est un nombre indépendant de i, avec $0 < \theta \leq 1$.

2° On forme une suite $(U_i)_{i \geq -1}$ de sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ de co-dimension 1 en posant

$$U_i := \begin{cases} \langle \mathbf{x}_1^{(0)}, \dots, \mathbf{x}_{n-1}^{(0)} \rangle_{\mathbb{R}} & \text{si } i = -1, \\ \langle \mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)} \rangle_{\mathbb{R}} & \text{si } i \geq 0t, \end{cases}$$

et pour chaque $i \geq -1$, on choisit un vecteur unitaire $\mathbf{u}_i \in U_i^{\perp}$.

Pour tout $i \geq 0$, on a

$$U_{i-1} = \langle \mathbf{x}_1^{(i)}, \dots, \widehat{\mathbf{x}_{\ell_i}^{(i)}}, \dots, \mathbf{x}_n^{(i)} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Grâce au lemme 2.2 puis au corollaire 2.3 du cours 4, on en déduit

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i) &= \operatorname{dist}(U_{i-1}, U_i) \\ &= \frac{\|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{\ell_i}^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\|}{\|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{k_i}^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\| \, \|\mathbf{x}_1^{(i)} \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathbf{x}_{\ell_i}^{(i)}} \wedge \cdots \wedge \mathbf{x}_n^{(i)}\|}. \end{aligned}$$

Pour majorer ce rapport, on applique l'inégalité d'Hadamard's au numérateur et l'hypothèse (4) à chaque facteur du dénominateur. Grâce aux estimatimations (3), on en déduit

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{u}_i) \leq \frac{\theta^{-2}}{\|\mathbf{x}_1^{(i)}\| \cdots \|\mathbf{x}_n^{(i)}\|} \leq \theta^{-2} \exp(-a_1^{(i)} - \cdots - a_n^{(i)}) = \theta^{-2} \exp(-q_i).$$

Comme $q_{i+1} - q_i \geq c \geq \log(2)$ pour tout $i \geq 0$, cela implique

$$\operatorname{dist}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) \leq \sum_{m=i+1}^{j} \operatorname{dist}(\mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m) \leq \theta^{-2} \sum_{m=i+1}^{j} \exp(-q_m) \leq 2\theta^{-2} \exp(-q_{i+1})$$

pour toute paire d'entiers i et j avec $-1 \leq i < j$. Enfin, comme $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$ est complet sous la distance projective (corollaire 1.6 du cours 4), on conclut qu'il existe un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\boxed{\operatorname{dist}(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}) \leq 2\theta^{-2} \exp(-q_{i+1}) \quad \text{pour tout } i \geq -1.}$$

En multipliant chaque $\mathbf{u}_i$ par ± 1 pour un choix de signe approprié, on peut supposer que $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u} \geq 0$ pour tout $i \geq -1$. Alors le lemme 1.5 du cours 4 livre

$$\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}\| \leq 4\theta^{-2} \exp(-q_{i+1}) \quad (i \geq -1).$$

Fixons maintenant un indice $i \geq 0$. Pour chaque $j = 1, \ldots, n$ avec $j \neq k_i$, on a $\mathbf{x}_j^{(i)} \in U_i$, donc $\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}_i = 0$ et par suite

$$|\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}| = \|\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}_i)| \leq \|\mathbf{x}_j^{(i)}\| \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_i\| \leq 8\theta^{-2} \exp(a_j^{(i)} - q_{i+1})$$

en utilisant l'hypothèse (3) pour majorer la norme de $\mathbf{x}_j^{(i)}$. On obtient ainsi

$$\log |\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}| \leq c_1 + a_j^{(i)} - q_{i+1} \quad (j \neq k_i),$$

avec $c_1 = \log(8\theta^{-2})$. De même, on trouve

$$\log |\mathbf{x}_{k_i}^{(i)} \cdot \mathbf{u}| \leq c_1 + a_{k_i}^{(i)} - q_i,$$

car $\mathbf{x}_{k_i}^{(i)} \in U_{i-1}$. Cela permet de majorer les trajectoires des éléments de la base $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ sur l'intervalle $[q_i, q_{i+1}]$. Pour tout $q \in [q_i, q_{i+1}]$ et tout $j = 1, \ldots, n$, on en déduit en effet

$$L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q) = \max\big\{ \log \|\mathbf{x}_j^{(i)}\|,\ q + \log |\mathbf{x}_j^{(i)} \cdot \mathbf{u}| \big\} \leq \begin{cases} c_1 + a_j^{(i)} & \text{si } j \neq k_i, \\ c_1 + a_j^{(i)} + q - q_i & \text{si } j = k_i, \end{cases} \tag{1.1}$$

car $\log \|\mathbf{x}_j^{(i)}\| \leq \log(2) + a_j^{(i)} \leq c_1 + a_j^{(i)}$. Fixons $q \in [q_i, q_{i+1}]$. Comme $\mathbf{x}_1^{(i)}, \ldots, \mathbf{x}_n^{(i)}$ sont linéairement indépendants, on a aussi

$$(L_{\mathbf{u},1}(q), \ldots, L_{\mathbf{u},n}(q)) \leq \Phi_n\big(L(\mathbf{x}_1^{(i)}, q), \ldots, L(\mathbf{x}_n^{(i)}, q)\big)$$

pour l'ordre composantes à composantes défini par

$$(t_1, \ldots, t_n) \leq (t'_1, \ldots, t'_n) \quad \Longleftrightarrow \quad t_j \leq t'_j \ \text{ pour } j = 1, \ldots, n.$$

Comme Φ_n préserve cet ordre ($\mathbf{t} \leq \mathbf{t}' \ \Rightarrow\ \Phi_n(\mathbf{t}) \leq \Phi_n(\mathbf{t}')$), les inégalités (1.1) livrent

$$\begin{aligned} \Phi_n\big(L(\mathbf{x}_1^{(i)}, q), \ldots, L(\mathbf{x}_n^{(i)}, q)\big) &\leq (c_1, \ldots, c_1) + \Phi_n\big(a_1^{(i)}, \ldots, \widehat{a_{k_i}^{(i)}}, \ldots, a_1^{(i)}, a_{k_i}^{(i)} + q - q_i\big) \\ &= (c_1, \ldots, c_1) + \mathbf{P}(q) \end{aligned}$$

Cela signifie que

$$(L_{\mathbf{u},1}(q), \ldots, L_{\mathbf{u},n}(q)) \leq (c_1 + P_1(q), \ldots, c_1 + P_n(q))$$

Enfin, comme les différences $c_1 + P_j(q) - L_{\mathbf{u},j}(q)$ sont ≥ 0, elles sont majorées par leur somme

$$\sum_{j=1}^{n} \big(c_1 + P_j(q) - L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q)\big) = nc_1 + q - \sum_{j=1}^{n} L(\mathbf{x}_j^{(i)}, q).$$

Par ailleurs, le théorème de Minkowski donne $\sum_{j=1}^{n} L_{\mathbf{u},j}(q) \geq q - c_0$ pour une constante $c_0 = c_0(n) \geq 0$ (voir cours 2, §2). On en déduit que

$$\|\mathbf{L}_{\mathbf{u}}(q) - \mathbf{P}(q)\|_\infty \leq nc_1 + c_0$$

pour tout $q \in [q_i, q_{i+1}]$ et tout $i \geq 0$, donc pour tout $q \geq q_0$. Cela montre que $\mathbf{L}_{\mathbf{u}} - \mathbf{P}$ est borné.

Cet argument montre aussi que, pour tout $i \geq 0$ et tout $q \in [q_i, q_{i+1}]$, les vecteurs de la base $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ réalisent les minima de $\mathcal{C}_{\mathbf{u}}(q)$ à des facteurs près bornés inférieurement et supérieurement par des constantes indépendantes de

2. **Construction des bases.**

Il reste à construire les bases $\underline{\mathbf{x}}^{(i)}$ de $\mathbb{Z}^n$ requises à la première étape de la stratégie développée précédemment. La condition (4) est la plus délicate à remplir. Les autres conditions ne posent pas vraiment de difficultés. Dans [Ro2015, Theorem 5.5], on montre qu'il est possible de le faire en général avec $\theta = e^{-2}$ si la maille c de $\mathbf{P}$ est au moins $4 + (n+3)\log(2)$. On propose ici une approche plus simple basée sur [CR2023]. Elle impose des conditions plus fortes sur le n-système $\mathbf{P}$ mais elle a aussi d'autres applications, et elle évite la partie technique de [Ro2015, §5].

References

[CR2023] J. Champagne and D. Roy, Diophantine approximation with constraints, Acta Arithmetica **207** (2023), 57–99.

[Ro2015] D. Roy, On Schmidt and Summerer parametric geometry of numbers, *Ann. of Math.* **182** (2015), 739–786.

[Sc1967] W. M. Schmidt, On heights of algebraic subspaces and Diophantine approximations, *Ann. of Math.* **85** (1967), 430–472.

[SS2013] W. M. Schmidt and L. Summerer, Diophantine approximation and parametric geometry of numbers, *Monats. Math.* **169** (2013), 51–104.